Доклады Академии наук СССР
1956. Том 107, № 1

МАТЕМАТИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком М. В. Келдышем 12 XII 1955)

Известно, что при изучении конечных групп важную роль играет групповое кольцо. Оно обычно вводится формально как множество числовых функций $x(g)$, в котором задана операция свертки

$$z(g) = \sum_h x(gh^{-1})\, y(h). \tag{1}$$

Однако можно показать, и это является целью настоящей заметки, что групповое кольцо можно получить несложным предельным переходом, исходя из конечных групп.

Заметим прежде всего, что прямое произведение большого числа одинаковых групп $G \times G \times \ldots \times G$ можно записать в виде группового кольца, но только функции $x(g)$ будут не числовые, а матричные. Действительно, пусть $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — операторы проектирования на N взаимно-перпендикулярных единичных векторов. Любой элемент прямого произведения можно представить в виде формальной суммы $g_1P_1 + g_2P_2 + \ldots + g_NP_N$. Легко проверить, что перемножение этих сумм по правилу умножения многочленов совпадает с групповой операцией в прямом произведении, если считать операторы P_i перестановочными с элементами группы.

Суммы $g_1P_1 + g_2P_2 + \ldots + g_NP_N$ можно записать несколько по-иному, собирая слагаемые, содержащие одинаковые множители g:

$$g_1P_1 + g_2P_2 + g_NP_N = \sum_g gP(g). \tag{2}$$

Таким образом, элементы прямого произведения можно записать в виде матричных функций $P(g)$.

Замечание. Эти функции $P(g)$ обладают следующими свойствами:

$$P(g) = P_{i_1} + \cdots + P_{i_k}; \tag{3}$$

$$P(g)\,P(h) = 0, \text{ если } g \neq h; \qquad P(g)\,P(g) = P(g); \tag{4}$$

$$\sum_g P(g) = E. \tag{5}$$

Прямая проверка показывает, что групповое умножение приводит к свертке для функций $P(g)$:

$$R(g) = \sum_h P(gh^{-1})\, Q(h). \tag{6}$$

Для того чтобы получить настоящее групповое кольцо с числовыми функциями, объединим в один класс все те элементы прямого произведения, которые получаются друг из друга произвольной перестановкой P_i.

Ясно, что каждый такой класс характеризуется целочисленной функцией («числа заполнения») $n(g) = \operatorname{Sp} P(g)$. Удобнее, впрочем, ввести функцию

$$p(g) = \frac{1}{N} \operatorname{Sp} P(g), \tag{7}$$

показывающую, какая доля из всех N проекционных операторов встречается с множителем g.

Назовем теперь произведением двух классов $p(g) \circ q(g)$ множество всевозможных произведений $P(g) \circ Q(g)$, где $P(g)$ входит в $p(g)$, а $Q(g)$ — в $q(g)$. Эти произведения будут входить, конечно, в разные классы. Действительно

$$r(g) = \frac{1}{N} \operatorname{Sp} R(g) = \sum_h \frac{1}{N} \operatorname{Sp} [P(gh^{-1}) Q(h)], \tag{8}$$

и так как след произведения матриц PQ не определяется однозначно следами матриц P и Q, то $r(g)$ будет принимать различные значения для разных представителей $P(g)$ из класса $p(g)$ и $Q(g)$ из $q(g)$ Однако при $N \to \infty$ имеет место следующее утверждение:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Sp}(PQ) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Sp} P \cdot \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Sp} Q. \tag{9}$$

Смысл этого равенства следующий. Рассмотрим все матрицы P (вида (3)), для которых $\operatorname{Sp} P = pN$, и все матрицы Q, для которых $\operatorname{Sp} Q = qN$. Обозначим через $\delta(N)$ долю тех произведений PQ, для которых выполнено неравенство

$$\left| \frac{\operatorname{Sp}(PQ)}{N} - \frac{\operatorname{Sp} P}{N} \cdot \frac{\operatorname{Sp} Q}{N} \right| > a \frac{\ln N}{\sqrt{N}}. \tag{10}$$

Тогда

$$\delta(N) = o(N^{-b}) \tag{11}$$

для любого $b > 0$.

Это утверждение можно доказать либо непосредственным подсчетом $\delta(N)$, либо сведением к обычным теоремам теории вероятностей.

Сравнение (8) и (9) показывает, что асимптотически при $N \to \infty$ классы перемножаются как элементы группового кольца.

В групповом кольце кроме операции свертки есть еще операция линейной комбинации. Эта операция также имеет конечный аналог.

Рассмотрим два элемента $P(g)$ и $Q(g)$ и два проекционных оператора A, B (вида (3)), в сумме равных единичному $A + B = E$. Тогда

$$AP(g) + BQ(g) = R(g)$$

снова есть элемент прямого произведения — «суперпозиция», «смесь» элементов $P(g)$ и $Q(g)$.

Предельный переход, в точности аналогичный уже проведенному, приводит к линейной комбинации

$$ap(g) + bq(g) = r(g) \tag{12}$$

с суммой весов, равной единице:

$$a + b = 1. \tag{13}$$

Рассмотренная конструкция приводит к кольцу неотрицательных функций $p(g)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{g} p(g) = 1. \tag{14}$$

Это кольцо замкнуто относительно операции свертки (1) и линейной комбинации (12).

Рассмотрим два примера.

I. Группа $\mathfrak{S}_2 = (1, e)$, $e^2 = 1$.

Умножение $p = p_1 \cdot 1 + p_2 e$ на $q = q_1 \cdot 1 + q_2 e$ происходит по правилу

$$r_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2, \quad r_2 = p_1 q_2 + p_2 q_1. \tag{15}$$

Отсюда видно, что

$$r_1 + r_2 = (p_1 + p_2)(q_1 + q_2); \tag{16}$$

$$r_1 - r_2 = (p_1 - p_2)(q_1 - q_2), \tag{17}$$

т. е. групповое умножение сводится просто к умножению сумм и разностей.

Если рассмотреть прямое произведение произвольной конечной группы G на $\mathfrak{S}_2$, то групповое кольцо группы $G \times \mathfrak{S}_2$ можно записать в виде $p_1(g) \cdot 1 + p_2(g) \cdot e$.

Формулы (15), (16) и (17) остаются в силе, если заменить в них числа функциями, а умножение сверткой.

Объединим теперь в один класс все элементы группового кольца с одинаковой разностью $p_1(g) - p_2(g)$. Формула (17) показывает, что перемножение таких классов — однозначная операция.

Эта конструкция приводит к групповому кольцу действительных функций $x(g)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{g} |x(g)| \leqslant 1.$$

Коэффициентами линейной комбинации могут быть любые действительные числа, сумма модулей которых меньше или равна единице.

II. Совершенно аналогично можно получить комплекснозначные функции, если вместо $\mathfrak{S}_2$ рассмотреть коммутативную группу $1, e, j, ej$ с законом умножения $e^2 = 1$, $j^2 = e$.

В заключение следует отметить, что подобным же образом можно получить непрерывные группы как предел конечных. Руководящая идея остается той же самой. Рассматриваются конечные группы высокого порядка и изучается умножение классов. Это умножение неоднозначно. Однако асимптотически при $N \to \infty$ оно приводит к однозначной операции. Как всегда при статистических рассмотрениях, $\frac{1}{\sqrt{N}}$ является мерой размазанности результата.

Поступило
8 XII 1955